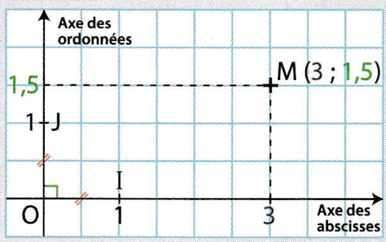
5 Vecteurs et opérations

FICHE 31 Bien démarrer

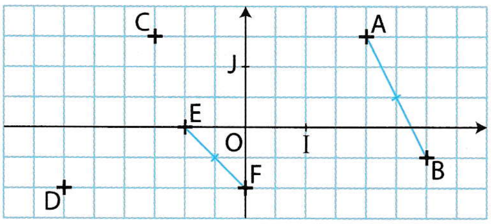
▸ Un **repère** (O; I, J) est **orthonormé** lorsque le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.

▸ Dans le repère (O; I, J) ci-contre :
- 3 est **l'abscisse** du point M,
- 1,5 est **l'ordonnée** du point M,
- (3 ; 1,5) sont les coordonnées du point M.



1 Lire des coordonnées de points

On a placé les points A, B, C, D, E, F dans le repère orthonormé (O; I, J) ci-dessous.



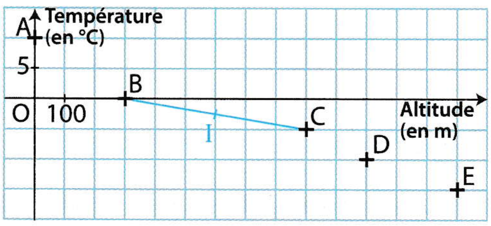
a. Lire les coordonnées de ces points.
- A(...2...;...1,5..)
- B(...3...;...−0,5)
- C(−1,5;...1,5..)
- D(...−3..;...−1..)
- E(...−1..;...0...)
- F(...0...;...−1..)

b. Le point G a la même ordonnée que A et a pour abscisse l'opposée de celle de D.
Indiquer les coordonnées de G : G(...3...;...1,5..).

c. Lire les coordonnées :
- du milieu du segment [EF] : (−0,5 ; −0,5)....
- du milieu du segment [AB] : (2,5 ; 0,5).........

2 Lire des coordonnées sur un graphique

Des alpinistes ont relevé les températures lors d'une ascension. Elles sont indiquées ci-dessous.



a. Compléter ce tableau.

Point	A	B	C	D	E
Abscisse	0	300	900	1 100	1 400
Ordonnée	10	0	−5	−10	−15

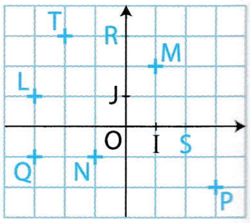
b. Lire les coordonnées du milieu I de [BC] : (600 ; −2,5).....
Interpréter ces coordonnées.

À 600 m d'altitude, il faisait −2,5°C.

3 Placer des points dans un repère

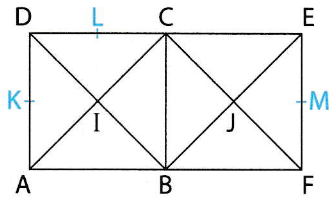
Placer les points ci-dessous dans le repère (O; I, J).

- L(−3; 1)
- M(1; 2)
- N(−1; −1)
- P(3; −2)
- Q(−3; −1)
- R(0; 3)
- S(2; 0)
- T(−2; 3)



4 Utiliser une figure

ABCD et BCEF sont deux carrés de centres I et J.



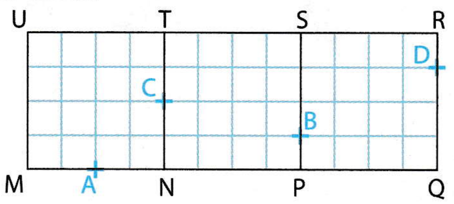
On considère le repère orthonormé (A; B, D).

a. Lire les coordonnées de tous les points de la figure :
- A(0 ; 0)....
- B(1 ; 0)....
- C(1 ; 1)....
- D(0 ; 1)....
- E(2 ; 1)....
- F(2 ; 0)....
- I$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$..
- J$\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$..

b. Placer les points K, L, M dont les coordonnées sont :
- K$\left(0;\frac{1}{2}\right)$
- L$\left(\frac{1}{2};1\right)$
- M$\left(2;\frac{1}{2}\right)$

5 Placer selon le repère

Voici trois carrés.



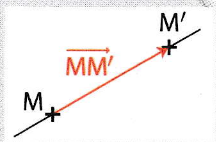
a. Placer les points A$\left(\frac{1}{2};0\right)$ et B$\left(2;\frac{1}{4}\right)$ dans le repère orthonormé (M; N, U).

b. Placer les points C$\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et D$\left(2;\frac{3}{4}\right)$ dans le repère orthonormé (N; P, T).

FICHE 32 Notion de vecteur

▸ M et M′ sont deux points distincts du plan. La **translation** qui transforme M en M′ est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{MM'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour **direction** celle de la droite (MM′), pour **sens** celui de M vers M′ et pour **norme** la longueur MM′.

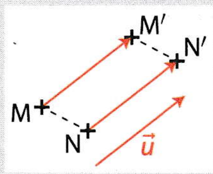


▸ **Vecteurs particuliers**

Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est le **vecteur nul** ; il est noté $\vec{0}$.
Le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le vecteur $\overrightarrow{NM}$.

▸ **Égalité de vecteurs**

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ équivaut à MM′N′N est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Sur la figure, $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$. On dit que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.



Deux calculs

• Calculer la moyenne des notes : 15 ; 12 ; 7 ; 8 ; 13.

$15 + 12 + 7 + 8 + 13 = 15 + 12 + 8 + 7 + 13$

$15 + 12 + 7 + 8 + 13 = 15 + 20 + 20 = 55$

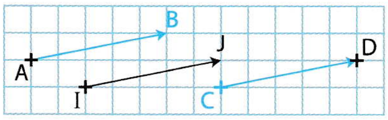
$\frac{55}{5} = 11$ donc la moyenne des notes est 11.

• Résoudre l'équation $6x - 1 = -4x + 9$.

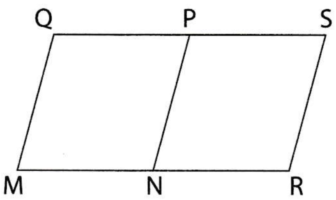
$6x + 4x = 9 + 1$ équivaut à $10x = 10$ soit $x = 1$.

★

1 La translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ transforme A en B et C en D. Construire les points B et C.



2 MNPQ et NRSP sont deux parallélogrammes superposables.



a. Compléter : par la translation de vecteur $\overrightarrow{PS}$,

• l'image de Q est P........ • l'image de N est R........

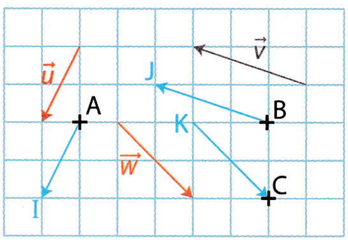
• l'image de P est S........ • l'image de M est N........

b. Compléter les égalités :

• $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{MR}$... • $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{PR}$.... • $\overrightarrow{NS} = \overrightarrow{MP}$...

3 Placer les points I, J, K tels que :

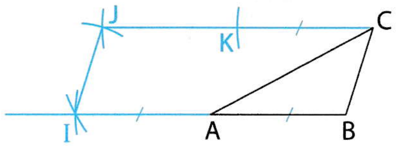
• $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$
• $\vec{v} = \overrightarrow{BJ}$
• $\vec{w} = \overrightarrow{KC}$



4 Avec la règle et le compas, construire les points I, J, K tels que :

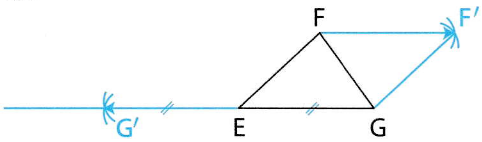
• $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IJ}$

• C est l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



★★

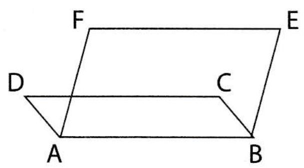
5 **a.** Avec la règle et le compas, construire l'image F′ de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$ et le point G′ tel que $\overrightarrow{EG'} = \overrightarrow{GE}$.



b. Démontrer que FF′EG′ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{FF'}$ et $\overrightarrow{G'E} = \overrightarrow{EG}$, donc $\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{G'E}$ et FF′EG′ est un parallélogramme.

6 ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes.



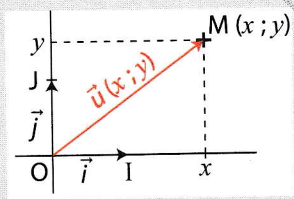
a. Quelle est la nature du quadrilatère CDFE ? Justifier.

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
ABEF est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$.
Ainsi, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ et CDFE est un parallélogramme.

b. En déduire un vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{CE}$.

D'après le **a.**, CDFE est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$. Ainsi, $\overrightarrow{FD}$ est un vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{CE}$.

FICHE 33 Coordonnées de vecteurs



- Le repère orthonormé (O; I, J) est aussi noté $(\mathbf{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée**.
- Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}\,, \vec{j})$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- **Calculs avec les coordonnées** (dans un repère orthonormé)
  - $\vec{u}(x\,;y) = \vec{v}(x'; y')$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
  - Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,; y_B - y_A)$.
  - La norme du vecteur $\vec{u}(x\,;y)$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$
  - $\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Deux calculs

- $f(x) = 4x^2 - x + 1$. Calculer $f(-2)$

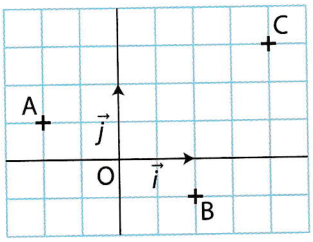
$f(-2) = 4 \times (-2)^2 - (-2) + 1 = 16 + 2 + 1 = 19$

- Développer et réduire $A = -2(x+1)(x+3)$.

$A = -2(x^2 + 3x + x + 3) = -2x^2 - 8x - 6$

★

1 **a.** Lire les coordonnées des vecteurs :



- $\overrightarrow{AB}$ $(2\,; -1)$
- $\overrightarrow{AC}$ $(3\,; 1)$
- $\overrightarrow{BC}$ $(1\,; 2)$
- $\overrightarrow{CB}$ $(-1\,; -2)$

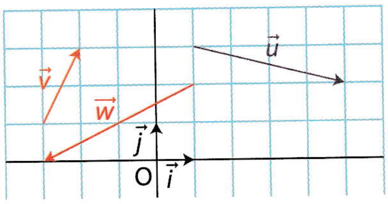
b. En déduire les longueurs suivantes :

- $AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$
- $BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

c. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

AB = BC donc le triangle ABC est isocèle en B. De plus, $AC^2 = 10$ et $AB^2 + BC^2 = 10$, donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.
Ainsi, le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

2 **a.** Lire les coordonnées des vecteurs :



- $\vec{u}$ $(4\,; -1)$
- $\vec{v}$ $(1\,; 2)$
- $\vec{w}$ $(-4\,; -2)$

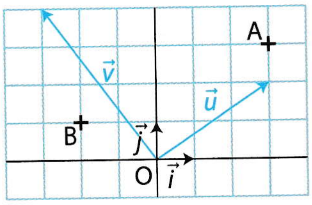
b. Calculer la norme de chacun de ces vecteurs.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

3 **1.** Représenter les vecteurs $\vec{u}(3\,;2)$ et $\vec{v}(-3\,;4)$ dans la base $(\vec{i}\,, \vec{j})$.



2. Déterminer les coordonnées des points M et N tels que :

a. $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ **b.** $\overrightarrow{BN} = \vec{v}$

a. $A(3;3)$ et $M(x;y)$. Alors $\overrightarrow{AM}(x-3\,;y-3)$.
$\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ équivaut à $x - 3 = 3$ et $y - 3 = 2$ c'est-à-dire $x = 6$ et $y = 5$. Donc $M(6;5)$.
b. $B(-2;1)$ et $N(a;b)$. Alors $\overrightarrow{BN}(a+2\,;b-1)$.
$\overrightarrow{BN} = \vec{v}$ équivaut à $a + 2 = -3$ et $b - 1 = 4$ c'est-à-dire $a = -5$ et $b = 5$. Donc $N(-5;5)$.

★★

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $R(1;3)$, $S(-2;4)$, $T(-5;-2)$ et $U(-8;-1)$

a. Déterminer les coordonnées des milieux respectifs I et J des segments [RU] et [ST].

b. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère RSUT ?

a. $I\left(\dfrac{1+(-8)}{2}\,;\,\dfrac{3+(-1)}{2}\right)$ soit $I\left(-\dfrac{7}{2}\,;1\right)$

$J\left(\dfrac{-2+(-5)}{2};\dfrac{4+(-2)}{2}\right)$ soit $J\left(-\dfrac{7}{2}\,;1\right)$

b. Les segments [RU] et [ST] ont même milieu donc RSUT est un parallélogramme.

5 Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(4;1)$, $B(7;4)$ et $C(11;0)$

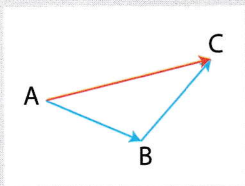
Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

$AB^2 = (7-4)^2 + (4-1)^2 = 3^2 + 3^2 = 18$
$BC^2 = (11-7)^2 + (0-4)^2 = 4^2 + (-4)^2 = 32$
$AC^2 = (11-4)^2 + (0-1)^2 = 7^2 + (-1)^2 = 50$
Ainsi, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

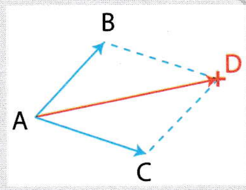
FICHE 34 Somme de vecteurs

▸ **Relation de Chasles**
Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



▸ **Règle du parallélogramme**
Pour tous points A, B et C :
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.



▸ Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, alors $\vec{u}+\vec{v}(x+x'\,;y+y')$.

Deux calculs

• Calculer $A=2\left(1-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{2}{3}$.

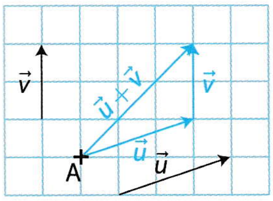
$A=2\times\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{9}{6}-\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{6}$

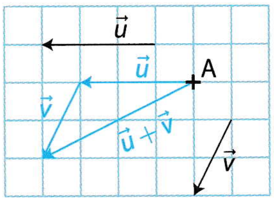
• Factoriser $B=x^2-9$.

$B=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

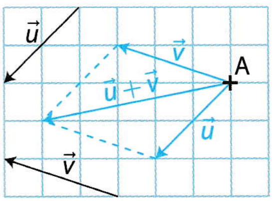
★

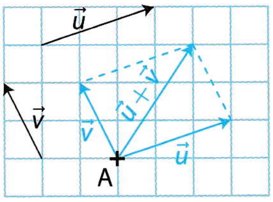
1 Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant la relation de Chasles.



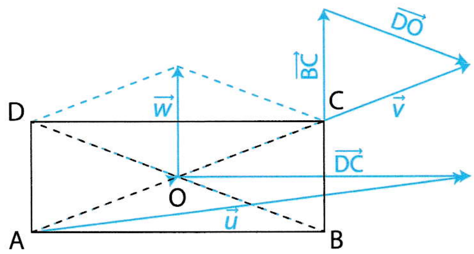


2 Construire le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant la règle du parallélogramme.





3 ABCD est un rectangle de centre O.
Construire :
• le représentant d'origine A du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DC}$;
• le représentant d'origine C du vecteur $\vec{v}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DO}$;
• le représentant d'origine O du vecteur $\vec{w}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$.



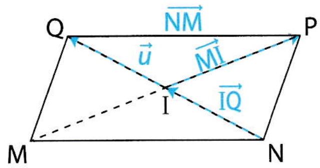
4 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$A(-2\,;3)$, $B(1\,;5)$, $C(-1\,;-4)$
Déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

$\overrightarrow{AB}\,(1-(-2)\,;\,5-3)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,2)$.
$\overrightarrow{AC}\,(-1-(-2)\,;\,-4-3)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}\,(1\,;-7)$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\,(3+1\,;\,2+(-7))$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}(4\,;-5)$.
On pose $M(x\,;y)$, $\overrightarrow{AM}(x+2\,;\,y-3)$.
$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ équivaut à $x+2=4$ et $y-3=-5$ c'est-à-dire $x=2$ et $y=-2$.
Le point M a pour coordonnées $(2\,;-2)$.

★★

5 MNPQ est un parallélogramme de centre I.



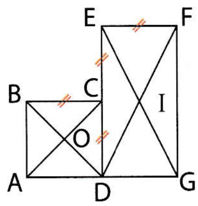
a. Construire le représentant d'origine N du vecteur :

$$\vec{u}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{NM}.$$

b. Démontrer que $\vec{u}=\overrightarrow{NQ}$.

• I est le milieu de [NQ] donc $\overrightarrow{IQ}=\overrightarrow{NI}$.
I est le milieu de [MP] donc $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{IP}$.
MNPQ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{PQ}$.
Ainsi, $\vec{u}=\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{NQ}$.
• On peut aussi utiliser la relation de Chasles :
$\vec{u}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NQ}$.

6 ABCD est un carré de centre O, DEFG est un rectangle de centre I. C est le milieu de [DE]. Justifier que les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DG}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CE}$ sont égaux.



$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{EF}$, donc $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.
$\vec{v}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}$. Or, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EF}$
donc $\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$.
Donc $\vec{u}=\vec{v}$.